

答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1]、[2]（各 5 点）

裏：[3]、[4]（各 5 点）

[1] 以下の積分をラプラス近似して主要項の寄与を答えよ。誤差項の大きさの評価はしなくてよい。

$$\int_0^{\infty} dx x^{-Nx^3+x} \quad (1)$$

[2] 関数 $f(x)$ に対するルジャンドル変換を $g(a) := \sup_x [ax - f(x)]$ で定義する。関数 $f(x) = x^2 - |x|$ をルジャンドル変換せよ。

[3] $1, 2, \dots, m$ の目が確率 p_1, \dots, p_m が出るサイコロを N 回振る。出目の経験分布が q_1, \dots, q_m である確率は、規格化定数を除くと $e^{-NS(\mathbf{q}||\mathbf{p})}$ という形になることを示せ。ただし $S(\mathbf{q}||\mathbf{p}) = \sum_i q_i \ln(q_i/p_i)$ は相対エントロピーである。

[4] 確率分布 \mathbf{p}, \mathbf{q} に対し、下に凸な関数 f を用いて定義される f -ダイバージェンス $D_f(\mathbf{p}||\mathbf{q}) = \sum_i q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$ を考える。この f が $f(1) = 0$ を満たすなら、 f -ダイバージェンスは非負であることを証明せよ。